Θεωρήματα Συνεχών Συναρτήσεων

1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + συν(πx) - 3$ και πεδίο ορισμού το διάστημα Δ=[-2,2]. Να δείξετε ότι η f παίρνει την τιμή 2.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - (κ+λ)x^2 - κλx + κλ$, με $κ,λ \in R$

   I) Να δείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών f(0) και f(1) είναι $\dfrac{(1-κ)(1-λ)}{2}$

   II) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε : $f(x_0) = \dfrac{(1-κ)(1-λ)}{2}$

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [α,β] και $x_1, x_2 \in [α,β]$, να δείξετε ότι υπάρχει $ξ \in [α,β]$ τέτοιο ώστε: $3f(x_1) + 5f(x_2) = 8f(ξ)$

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $\dfrac{x^{2004} + 2004}{x - 2} = \dfrac{x^{2000} + 2000}{-x - 2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2,2)

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

   $(x-β)(x^{2ν}+1) + (x-α)(x^{2κ}+1) = 0$ με $ν, κ \in N^*$ και $α < β$, έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα (α , β)

6. Έστω η εξίσωση: $x - κ = λ \cdot ημx$ με $κ \geq 0$, $λ \geq 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μια ρίζα θ θετική, για την οποία ισχύει: $θ \leq κ + λ$

7. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,2π] \to R$ με $f(0) = f(2π)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (0,π)$ ώστε $f(ξ) = f(ξ+π)$ με $f(0) \neq f(π)$

8. Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο [α , β] με $g(x) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (α,β)$ ώστε : $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \dfrac{1}{x_0 - α} + \dfrac{1}{x_0 - β}$

9. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0,1] με $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [0,1]

10. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και ισχύει η σχέση $\alpha^2 \cdot f(\alpha) + \beta^2 \cdot f(\beta) = -(f(\alpha) + f(\beta))$, να αποδείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β]

11. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο R και γνησίως φθίνουσα με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(\ln\xi) = \ln\xi$

12. Έστω $f:[\alpha,\beta] \to R$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $3f(\xi) = f(\alpha) + 2f(\beta)$

13. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο Δ=[0,1] και f(Δ)=[0,1], δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$

14. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R ώστε $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{2-x} = 1$ και ισχύει η σχέση: $8\eta\mu(x-4) \leq (x-4)f(x) \leq x^2 - 16$ για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την γραφική παράσταση της παραβολής $y = -x^2 + 7x - 6$ σε σημείο με τετμημένη στο διάστημα (2,4)

15. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f , g στο R ώστε για κάθε $x \in R$ να ισχύει η σχέση $f(x) \cdot g(x) \geq 2 - f(x)$. Δείξτε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

16. Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=$χ^2$-2-συνχ.
ι) Να αποδείξετε ότι: η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ=[0,π/2]
ιι) Να βρείτε το f(Δ)
ιιι) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(χ)=0 έχει μοναδική λύση στο διάστημα (0,π/2)

17. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,1] με f(0)=1 και f(1)=5. Δείξτε ότι η ευθεία y=3 τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα μοναδικό σημείο με τετμημένη στο διάστημα (0,1)

18. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\chi_0=-3$ και ισχύει

$$\lim_{x \to -3} \frac{6 \cdot \etaμ(x+3) + (x+3) \cdot f(x)}{x^2 - 9} = -335,$$ να βρείτε την τιμή f(-3)

19. Αν για την συνεχή συνάρτηση f στο R ισχύει $4 + f(x) \cdot (x^3 - 8) = \sqrt{3x^2 + 4}$ για κάθε $x \in R$, να βρείτε τον τύπο της f.

20. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^5 = 2 - 5x^2$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-1,1)

21. Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $-6 \leq α \leq 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\chi^5+5\chi+α=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [0,1].

22. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [0,3] για την οποία ισχύουν: f(0)=f(3) και f(1)=f(2). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,2]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=f(\xi+1)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=3-\ln\chi-e^{\chi}$ ορισμένη στο Δ=(0,3].

I) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία

II) Να βρείτε το f(Δ)

III) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln\chi+e^{\chi}=3$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα Δ.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{6 - x} - x$.

I) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

II) Να μελετηθεί η f ως προς την συνέχεια.

III) Να μελετηθεί η f ως προς το πρόσημο των τιμών της.

25. Αν f , g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [0,1] και ισχύουν :

i) $f(\chi)<g(\chi)$ για κάθε $\chi \in [0,1]$

ii) f(0)=0 , g(1)=1 και

iii) $0 < κ < λ$

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $\begin{vmatrix} f(x_0) & κ \\ g(x_0) & κ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} λ & x_0 \\ λ & f(x_0) \end{vmatrix}$

26. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\etaμx + x = \etaμα + \frac{\pi}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2}]$.

27. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $x^4 - 4x - 5 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R.

28. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $4x^3 + 6 = 3x^2 + 8x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (0,2)

29. Να λυθεί η ανίσωση: $\eta\mu 2x - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x > 0$ στο (0 , 2π)

30. Αν $f(x) = \dfrac{x^3}{16} - \eta\mu\pi x + 7$ στο διάστημα $[-4, 4]$, τότε η f παίρνει την τιμή $\dfrac{7}{2}$ στο διάστημα (-4 , 4)

31. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $\ln x + e^x = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0,1)

32. Δείξτε ότι η εξίσωση: $x + 1 + \ln(x^2 + 1) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο R.

33. Δείξτε ότι η εξίσωση: $x^3 + x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ έχει δύο μόνο ρίζες στο R.

34. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο [α , β] με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει: $x_0 \in (\alpha, \beta) : 5f(x_0) = 2f(\alpha) + 3f(\beta)$

35. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x = \eta\mu x + \alpha$ με $\alpha > 0$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα που δεν υπερβαίνει τον αριθμό α+1. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του α για την οποία η εξίσωση αυτή έχει ρίζα τον αριθμό α+1.