Υπάρχει σημείο $χ_0$ τέτοιο ώστε να ισχύει ....

(ή διαφορετικά περί ριζών εξίσωσης)

I. Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση $f(χ)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(α , β)$ μπορούμε να εργασθούμε ως εξής:

<u>1ος τρόπος</u>: Με το Θεώρημα Bolzano « αν $f|[α , β]$ συνεχής και $f(α)f(β) < 0 \Rightarrow$ υπάρχει $χ_0 \in (α , β)$: $f(χ_0)=0$ »

<u>2ος τρόπος</u>: Με το Θεώρημα Rolle δηλ. " αν $F|[α , β]$ είναι μια παράγουσα της $f|[α , β]$ με $F|[α , β]$ συνεχής , $F|(α , β)$ παραγωγίσιμη και $F(α)=F(β)$ τότε υπάρχει $χ_0 \in (α , β)$: $F'(χ_0)=0$ δηλ. υπάρχει $χ_0 \in (α , β)$: $f(χ_0)=0$ "

II. Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση $f(χ)=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(α , β)$ μπορούμε να εργασθούμε ως εξής:

<u>1ος τρόπος</u>: Όπως προηγούμενα αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας και στην συνέχεια ότι η f στο $(α , β)$ είναι γνησίως μονότονη (δηλ. $f'(χ) > 0$ ή $f'(χ) < 0$ για κάθε $χ \in (α , β)$) και έτσι εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μιας μόνο ρίζας.

<u>2ος τρόπος</u> : Αν για την $f|[α , β]$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle τότε μπορούμε να βρούμε το πλήθος των λύσεων της $f(χ)=0$ στο $[α , β]$ ως εξής:

1. Βρίσκουμε την $f'(χ)$

2. Λύνουμε την εξίσωση f΄(χ)=0 στο [α , β] και έστω $ξ_1$, $ξ_2$, …, $ξ_ν$ οι λύσεις της με $α < ξ_1 < ξ_2 < … < ξ_ν < β$
3. Φτιάχνουμε την ακολουθία :

   $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, $f(ξ_1)$, $f(ξ_2)$, … , $f(ξ_ν)$, $\lim_{x\to \beta} f(x) = l_2$

   Το πλήθος των εναλλαγών του προσήμου που εμφανίζεται στην παραπάνω ακολουθία μας δίνει το πλήθος των ριζών της f(χ)=0 στο [α , β].

III. Για να δείξουμε ότι η εξίσωση f(χ)=0 έχει το πολύ μία (ή δύο ή τρεις κ.λ.π) ρίζες στο (α , β) εργαζόμαστε με άτοπο. Δηλ. υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει δύο (ή τρεις ή τέσσερις κ.λ.π) ρίζες και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle σε καθένα από αυτά τα διαστήματα των ριζών για την f καταλήγουμε σε άτοπο.

Σχόλιο : Η έκφραση «η εξίσωση f(χ)=0 δεν έχει περισσότερες από μ ρίζες» είναι ισοδύναμη με την έκφραση «η εξίσωση f(χ)=0 έχει το πολύ μ ρίζες»

IV. Για να δείξουμε ότι η εξίσωση f(χ)=0 δεν μπορεί να έχει κ ρίζες στο (α , β) εργαζόμαστε με άτοπο, θεωρώντας ότι έχει κ ρίζες στο (α , β) και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle για την f σε καθένα από τα διαστήματα των ριζών.

V. Για να δείξουμε ότι η εξίσωση f(χ)=0 έχει κ ρίζες στο (α , β) χωρίζουμε το (α , β) κατάλληλα σε κ διαστήματα π.χ $[α , χ_1]$, $[χ_1 , χ_2]$, … , $[χ_{κ-1} , β]$ και αποδεικνύουμε ότι σε καθένα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα.

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ</u>

1. Αν για τη συνάρτηση f|[α , β] ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle τότε μεταξύ δύο ριζών ρ_1 , ρ_2 της f(χ)=0 υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho \in (\rho_1 , \rho_2)$ της εξίσωσης f΄(χ)=0
2. Αν για την συνάρτηση f|[α , β] ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle και $\rho_1 , \rho_2 \in [\alpha , \beta]$ με $\rho_1 < \rho_2$ δύο διαδοχικές ρίζες της f΄(χ)=0 , τότε η εξίσωση f(χ)=0 έχει μία το πολύ ρίζα $\rho \in (\rho_1 , \rho_2)$.
3. Αν μία πολυωνυμική εξίσωση f(χ)=0 με πραγματικούς συντελεστές έχει κ το πλήθος διαφορετικές πραγματικές ρίζες , τότε η εξίσωση f΄(χ)=0 έχει κ-1 το πλήθος τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.
4. Κάθε πολυωνυμική εξίσωση f(χ)=0 με πραγματικούς συντελεστές , νιοστού βαθμού έχει το πολύ ν πραγματικές ρίζες.
5. Αν μία πολυωνυμική εξίσωση f(χ)=0 με πραγματικούς συντελεστές , νιοστού βαθμού έχει ν πραγματικές διαφορετικές ρίζες ξ_1 , ξ_2 , … , ξ_ν τότε $f΄(\xi_i) \neq 0$ για κάθε Ι=1 , 2 , … , ν
6. Αν ρ είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης f΄(χ)=0, όπου f(χ)=0 είναι μια πολυωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, τότε υπάρχει το πολύ μία ρίζα ρ_1 της f(χ)=0 μικρότερη της ρ.
7. Αν ρ είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης f΄(χ)=0, όπου f(χ)=0 είναι μια πολυωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, τότε υπάρχει το πολύ μία ρίζα ρ_1 της f(χ)=0 μεγαλύτερη της ρ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\chi^3-3\chi+\alpha=0$ δεν μπορεί να έχει δύο λύσεις στο (0,1) για κάθε $\alpha \in R$.

2. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\chi^4+4\chi+1=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\chi^3-2=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο (0,2)

4. Αν $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ με α , β, $\gamma \in R$, $\alpha \neq 0$ και $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0$ να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

5. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(\chi^2-1)\sigma\upsilon\nu\chi+2\chi\eta\mu\chi=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-1 , 1)

6. Να υπολογίσετε το $\eta\mu 44^0$ με προσέγγιση εκατοστού.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^3+\alpha\chi+\beta = 0$ με α , $\beta \in R$ έχει
   ι) μία μόνο πραγματική λύση αν $\alpha>0$
   ιι) τρεις πραγματικές λύσεις αν $4\alpha^3+27\beta^2 < 0$

8. Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=αχ^3+βχ^2+γχ με α , β , γ $\in$R , α$\neq$0 και ρ$_1$, ρ$_2$, ρ$_3$ οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης f(χ)=0. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\frac{1}{x-\rho_3}$$ για κάθε χ$\in$R-{ρ$_1$, ρ$_2$, ρ$_3$ }

9. Αν για δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις f , g ισχύει:
f΄(χ)·g(χ)-f(x)·g΄(χ)=0 , να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f(χ)=0 υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της g(χ).

10. Δίνεται η εξίσωση χ^ν+αχ+β=0 με α , β$\in$R , ν$\in$N. Να δείξετε ότι:
ι) αν ο ν είναι άρτιος, η εξίσωση έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
ιι) αν ο ν είναι περιττός, η εξίσωση έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες

11. ι) Δείξτε ότι η εξίσωση χ^5-5χ+2=0 έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.
ιι) Δείξτε ότι η εξίσωση e^x=χ+1 έχει μία μόνο λύση. Ποια είναι η λύση;

12. Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης e^Χ.ημχ=1 περιέχεται μία τουλάχιστον ρίζα της e^Χ.συνχ+1=0.

13. Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=χ.(χ-1).(χ+2).(χ-3).(χ+1). Να δείξετε ότι η εξίσωση f΄(χ)=0 έχει τέσσερις λύσεις στο διάστημα (-2,3).

14. Δείξτε ότι η εξίσωση χ^9+5χ^7+3χ+1=0 έχει μία μόνο πραγματική ρίζα.

15. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x.e^x+1=e^x$, έχει μοναδική ρίζα και να βρεθεί.

16. Δείξτε ότι η εξίσωση $χ^2=χ.ημχ+συνχ$ έχει δύο λύσεις στο (-π,π)

17. Βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $e^{-x}=x+α$, $α\in R$.

18. Βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x+1+\ln(χ^2+1)=0$

19. Δείξτε ότι η εξίσωση $α^X=βχ+α$ με α , $β\in R$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα ι) αν $α>1$ και $β<0$ ή ιι) $0<α<1$ και $β>0$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(χ)=να_ν χ^{ν-1}+…+α_1$. Να αποδείξετε ότι:
    ι) αν $α_1+α_2+…+α_ν=0$ τότε η $f(χ)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)
    ιι) αν $α_ν(-1)^ν+ α_{ν-1}(-1)^{ν-1}+…+α_2+α_1=0$ τότε η $f(χ)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (-1,0)

21. Δίνεται η $f(χ)=χ^3+αχ^2+βχ+γ$ με α , β , $γ\in R$. Αν $ρ_1<ρ_2<ρ_3$ είναι οι πραγματικές ρίζες της $f(χ)=0$ να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:
    ι) $\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{f'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{f'(\rho_3)}=0$
    ιι) $\frac{\rho_1^2}{f'(\rho_1)}+\frac{\rho_2^2}{f'(\rho_2)}+\frac{\rho_3^2}{f'(\rho_3)}=1$ και

ιιι) $\dfrac{\rho_1^4}{f'(\rho_1)}+\dfrac{\rho_2^4}{f'(\rho_2)}+\dfrac{\rho_3^4}{f'(\rho_3)}=a^2-\beta$

22. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με f΄΄(χ) $\neq$0 για κάθε χ$\in$R να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(χ)=0 έχει το πολύ δύο ρίζες στο R.

23. Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α , β] , 0<α<β με f(α)=f(β)=0 και f΄΄(χ) $\neq$0 για κάθε χ$\in$(α , β).
ι) Δείξτε ότι η εξίσωση χ.f΄(χ)-f(χ)=0 έχει μοναδική ρίζα $χ_0$ στο (α , β)
ιι) Δείξτε ότι η εφαπτομένη στο σημείο ($χ_0$, f($χ_0$)) της γραφικής παράστασης της f, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

24. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο [0 , 1] , παραγωγίσιμη στο διάστημα (0 , 1) με $f(1)=f(0)+\dfrac{1}{2}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση f΄(χ)=χ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0 , 1).