

## Ασκήσεις στην εφαπτομένη καμπύλης



1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x + \frac{2}{x}$  στο σημείο της που έχει τετμημένη 2.
2. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  η εφαπτομένη της είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση (δ):  $x - 3y + 15 = 0$  ;
3. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ , η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\pi/4$  ; Υπολογίστε στην συνέχεια το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη αυτή με τους άξονες.
4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε την τιμή του  $a$  ώστε στα σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  που έχουν τετμημένες  $x_1 = 1$  και  $x_2 = -2$  οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.
5. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + ax + \beta$  στο σημείο  $M(0,1)$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$ , να βρείτε τα  $a$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .
6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \ln x$ , που περνά από το σημείο  $A(-1,0)$ .

7. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f(x)=-x^3$  και  $g(x)=2x^2+x$ . Να αποδείξετε ότι σε ένα από αυτά έχουν κοινή εφαπτομένη
8. Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y=3x-1$  εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=x^2+x$ . Ποιο είναι το σημείο επαφής τους ;

### Ασκήσεις στο ρυθμό μεταβολής

1. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς  $a$ , όταν  $a=5$  cm.
2. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις  $x$  ,  $y$  και περίμετρο 20 cm. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού όταν  $x=5$  cm.
3. Αν η μία πλευρά ορθογωνίου είναι διπλάσια της άλλης, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του όταν το εμβαδόν του είναι  $E=8$  m<sup>2</sup>.
4. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων  $A(2t-1,t+2)$  και  $B(t+2,2t+1)$  , όταν  $t=3$ .
5. Η ένταση του φωτός σε βάθος  $x$  m από την επιφάνεια του νερού δίνεται από τη σχέση:  $E(x) = 16 \cdot e^{-\frac{x^2+1}{2x}}$  . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της έντασης του φωτός σε βάθος  $x=4$  m.

6. Μεταβλητή ευθεία ( $\epsilon$ ):  $y=\lambda x+\beta$  περνά από το σημείο  $A(1,3)$  και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$  ,  $Oy$  στα σημεία  $M$  ,  $N$  αντίστοιχα. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $OMN$  , την χρονική στιγμή που η ( $\epsilon$ ) είναι παράλληλη στην διχοτόμο του δεύτερου τεταρτημορίου.

→ Ασκήσεις στην κίνηση υλικού σημείου

1. Η θέση ενός υλικού σημείου κάθε χρονική στιγμή  $t$ , δίνεται από τη σχέση  $S(t)=t^3+t+1$  ,  $t \geq 0$ 
  - I) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα  $[1,3]$
  - II) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου την χρονική στιγμή  $t=2$  sec
  
2. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και η θέση του δίνεται από τη σχέση  $S(t)=t^3-30t^2+288t+21$  όπου ο χρόνος  $t$  είναι σε sec και το  $S$  σε m.
  - I) Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του την χρονική στιγμή  $t$ .
  - II) Πότε το κινητό κινείται στην θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση ; Πότε είναι ακίνητο ;
  - III) Να βρείτε την επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα 15 m/sec.
  - IV) Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το κινητό κατά τη διάρκεια των πρώτων 15 sec.
  - V) Πόσο μετατοπίστηκε τα 15 πρώτα sec ;

### Προβλήματα ακροτάτων

1. Να βρείτε το σημείο  $M$  της ευθείας  $y=2x$  που απέχει από το  $A(5,0)$  τη μικρότερη απόσταση.
2. Βρείτε το σημείο  $M$  της καμπύλης με εξίσωση  $y = \sqrt{2x+3}$  που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.
3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=2x^5+15x^3+4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Σε ποιο σημείο της η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης έχει την ελάχιστη κλίση;
4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^2-2(e^\lambda+2)x+10e^\lambda-4$ . Βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$  συναρτήσει του  $\lambda$ . Αν  $g(\lambda)$  είναι η ελάχιστη αυτή τιμή της  $f$ , να βρείτε τη μέγιστη τιμή της  $g(\lambda)$
5. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει σταθερή περίμετρο  $c$ . Δείξτε ότι το εμβαδόν του γίνεται μέγιστο όταν αυτό είναι ισόπλευρο.
6. Ένα σημείο  $A$  της ευθείας  $y=1-3x$  βρίσκεται στο  $1^0$  τεταρτημόριο. Από το  $A$  φέρνουμε κάθετες στους άξονες οπότε σχηματίζεται ένα ορθογώνιο. Βρείτε το  $A$  ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό.
7. Ένας κύλινδρος έχει όγκο  $V=1000 \text{ m}^3$ . Δείξτε ότι η συνολική του επιφάνεια  $E$  γίνεται ελάχιστη, όταν το ύψος του είναι ίσο με τη διάμετρο της βάσης του.

8. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{x}{\beta}$ ,  $x > 0$

έχει ακρότατο στο σημείο  $M(1,3)$ , να βρείτε τα  $a$ ,  $\beta$  καθώς και το είδος του ακροτάτου.

### Αποδεικτικά – Υπολογιστικά θέματα

1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:  $3f(x^3)=f(x^2)+12$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) \cdot f(1+h) - 6}{h} = 6$

2. Αν  $f$ ,  $g$  είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ , και ισχύει η σχέση:  $f(3-x)=g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) \cdot g(h) - f(0) \cdot g(0)}{h} = f'(0) \cdot f(3) + g'(0) \cdot g(3)$$

3. Αν  $\varphi(x)=(x+a)e^{x+\beta}$ , να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

4. Αν  $f(x)=a \cdot \eta\mu(\lambda x) + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu(\lambda x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:  $f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0$

5. Αν  $f(x)=\sigma\upsilon\nu(\ln x) + \eta\mu(\ln x)$ ,  $x > 0$ , να δείξετε ότι:

$$x^2 \cdot f''(x) + x f'(x) + f(x) = 0$$

6. Αν  $f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε

$$\text{ότι: } f'(x) + 4x^3 f(x) = x f''(x)$$

7. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει η σχέση:  $f(e^{x-1})=e^{x-1}+\ln x$ ,  $x>0$ , να υπολογίσετε το  $f''(1)$ .

### Διάφορα θέματα

1. Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

α)  $f(x)=e^x+x$       β)  $f(x)=x^5+x^3$       γ)  $f(x)=\sigma\phi x$   
δ)  $f(x)=x^2+3x+2$       ε)  $f(x)=5x-1$       στ)  $f(x)=x^3+x^2+10x-1$

2. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α)  $f(x)=x^3+x^2-5x+1$       β)  $f(x)=x^3-3x^2+3x-10$   
γ)  $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

3. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α)  $f(x)=x^2 \cdot \ln x$       β)  $f(x)=e^x \cdot \ln x$   
γ)  $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$       δ)  $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$   
ε)  $f(x)=x \cdot e^x$       στ)  $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

4. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α)  $f(x)=(x-1)^3 \cdot (x-2)^3$       β)  $f(x)=x^3 e^x - 27e^3$   
γ)  $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=2x^3-3x^2+\lambda+2001$ ,  $x \in \mathbb{R}$

- i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.
- ii) Δείξτε ότι η  $f$  έχει ένα τοπικό ελάχιστο το οποίο και να βρεθεί ως συνάρτηση του  $\lambda$ .
- iii) Να βρεθεί το  $\lambda$  αν το τοπικό ελάχιστο της  $f$  είναι το 2004.
6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=-2x^2+12x-(\mu^2+\mu+2016)$ . Να βρεθεί το  $\mu$  εάν γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι το 2000.
7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=-x^4+4\lambda^3x+k$ ,  $\lambda>0$ . Γνωρίζουμε ότι η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο το 8 για  $x=1$ , να βρείτε τα  $k$  και  $\lambda$ .
8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^3+(a-1)x^2+2x+10$ . Να βρεθεί για ποιες τιμές του  $a$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\mathbb{R}$ .
9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$ ,  $x\in\mathbb{R}$
- α) Να βρείτε την  $f(x)$ .
- β) Να βρείτε τα σημεία  $\xi$  για τα οποία η παράγωγος της  $f'(\xi)=0$ .
- γ) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης .
- δ) Να βρείτε το  $a$  αν η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το 2002.
10. Δίνεται η συνάρτηση  $F(x)=xe^{2k-x}$
- α) Να βρεθεί η  $F'(x)$ .
- β) Να μελετηθεί η  $F$  ως προς τη μονοτονία .
- γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $F$  έχει μέγιστο το οποίο και να βρεθεί.
- δ) Εάν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το  $e$ , να βρεθεί το  $k$ .