

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

A) $f(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$, **B)** $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 2}$, $x_0 = 1$

Γ) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{6}}{\sqrt{x+1} - 1}$, $x_0 = 0$, **Δ)** $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$, $x_0 = 1$

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 6x + 8}, & x \in [0, 4) \cup (4, +\infty) \\ \frac{1}{8}, & x = 4 \end{cases} \quad \text{στο σημείο } x_0 = 4$$

3. Για ποια τιμή του $k \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4-x}}{\sqrt{x} - x}, & x \in (0, 1) \cup (1, 3] \\ k, & x = 1 \end{cases}$

είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$;

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$\varphi(x) = f(x^2 - 2x + 4)$	$k(x) = f(\sin x) + \sin(f(x))$	$g(x) = [f(\ln x)]^2$
$h(x) = f(e^{\sin x} - 2)$	$t(x) = f(\sqrt{\ln x}) + \sqrt{f(x)}$	$p(x) = \eta\mu[f(\sqrt{\frac{1}{x}})]$

5. Από μια πισίνα αντλείται νερό και ο όγκος του νερού στην πισίνα μετά t min από τη στιγμή που άρχισε η άντληση είναι $V = 250(40 - t^2) \text{ m}^3$. Να βρείτε πόσο γρήγορα ρέει το νερό έξω από την πισίνα 5 min μετά την άντληση.

6. Ένα μόριο σκόνης κινείται κατά μήκος του άξονα $x'x$ και η θέση του κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 + 2t^2 - 4t + 1$.

- A) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του ως συνάρτηση του χρόνου.
- B) Ποια είναι η ταχύτητα του μορίου σε χρόνο 1 sec ;
- Γ) Πότε το μόριο είναι στιγμιαία ακίνητο;
- Δ) Πότε το μόριο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική;
- Ε) Πότε το μόριο κάνει επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη κίνηση;
- ΣΤ) Ποιο είναι το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το μόριο στη διάρκεια των πρώτων 2sec;
- Z) Πόσο μετατοπίστηκε το μόριο από την αρχική του θέση στη διάρκεια των πρώτων 2 sec;

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \alpha\sqrt{x^2 - x + 9} - 3\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και

$$g(x) = \sqrt{x} - 1$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.
- B) Να ορίσετε τη συνάρτηση: $h = \frac{f}{g}$
- Γ) Αν η γραφική παράσταση της h διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $K(9, 3)$ να βρείτε τα α, β
- Δ) Αν $\alpha = \beta = 1$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$
- Ε) Για $\alpha = \beta = 1$ να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$p(x) = \begin{cases} h(x) & , x \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \\ 2 & , x = 1 \end{cases} \quad \text{είναι συνεχής στο σημείο } x_0 = 1$$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 4x - 2$.

- A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- B) Να βρείτε το σημείο της γραφικής της παράστασης στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.
- Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο του προηγούμενου ερωτήματος.

Δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{2x^2 - 3x + 1}$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^{\alpha x}$ και $g(x) = \beta \ln x$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.
- B) Να βρείτε για ποια τιμή του α η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$.
- Γ) Να βρείτε για ποια τιμή του β η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g στο σημείο $B(1, g(1))$ είναι παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων.
- Δ) Αν A είναι το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y' y$ και B το σημείο τομής της C_g με τον άξονα $x' x$ και $\alpha = 1, \beta = -1$ να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο A ταυτίζεται με την εφαπτομένη της C_g στο B .

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$.

- A) Να βρείτε σημείο M της C_f ώστε η εφαπτομένη της (ϵ) στο M να είναι παράλληλη στην ευθεία (η): $3x + y - 4 = 0$. Στη συνέχεια βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ).

B) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{f(x) - f(1)}$

- Γ) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) \leq 0$;

Δ) Αν $g(x) = \ln f'(x)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

B) Για ποιες τιμές του $x \in A$ η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$;

Γ) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\alpha^2 \frac{f'(x)}{f''(x)} - \alpha(e^x - 1)f'(x) + 6e^{f'(x)} + \alpha = 0$$

Δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = e^{2f(x)-1}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.