ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ομάδα 1η

1. Αν $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\ldots,\omega_6\}$ είναι ο δ.χ ενός πειράματος τύχης να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1)$, ……,$P(\omega_6)$ αν είναι γνωστό ότι αυτές αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά 1/30.

2. Αν $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\ldots,\omega_5\}$ είναι ο δ.χ ενός πειράματος τύχης με $P(\omega_1)=2P(\omega_2)=3P(\omega_3)=4P(\omega_4)=5P(\omega_5)$ να βρείτε τις πιθανότητες αυτές.

3. Έστω Α , Β ενδεχόμενα ενός πεπερασμένου δ.χ Ω ενός πειράματος τύχης. Αν $P(A)=P(A\cup B')$ και $P(B)=P(A'\cap B)$ να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι συμπληρωματικά. (από Ε.Μ.Ε)

4. Έστω ο δ.χ $\Omega=\{1,2,3,4,\ldots\ldots,2000\}$ με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα και Α , Β ενδεχόμενα του Ω ασυμβίβαστα, για τα οποία ισχύει:
   $16P^2(B)-25P(B)-P(A)+10=0$.
   α) Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α , Β
   β) Να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων των Α , Β
   γ) Τι συμπεραίνετε για τα ενδεχόμενα Α , Β; (από Ε.Μ.Ε)

5. Το κατάστημα που αγοράζω παντελόνια έχει τα μεγέθη α , β , γ , δ. Τα παντελόνια μεγέθους β είναι το 135% των παντελονιών μεγέθους α, το μέγεθος γ είναι το 15% όλων των παντελονιών και το μέγεθος δ είναι το 25% των παντελονιών μεγέθους β. Πάω να αγοράσω ένα παντελόνι και όταν μπαίνω στο κατάστημα λέω στον πωλητή να μου δώσει ένα παντελόνι από τα ράφια. Ποια είναι η πιθανότητα:
   Ι) το παντελόνι να είναι μεγέθους α ή γ ;
   ΙΙ) αν φοράω παντελόνι μεγέθους γ , να μου δώσει παντελόνι μεγέθους γ;
   ΙΙΙ) να είναι μεγέθους γ ή να μην είναι μεγέθους β; (από Ε.Μ.Ε)

6. Ο ποιοτικός έλεγχος σ᾽ ένα μηχάνημα που παράγεται από μια βιομηχανία έδειξε ότι:

   ι) Η πιθανότητα να μη λειτουργεί είναι 0,04

   ιι) Η πιθανότητα να έχει άλλο ελάττωμα είναι 0,05

   ιιι) Η πιθανότητα να μη λειτουργεί και να έχει και άλλο ελάττωμα είναι 0,02.

   Επιλέγουμε στην τύχη ένα μηχάνημα. Να βρείτε την πιθανότητα:

   α) Να μην λειτουργεί ή να έχει άλλο ελάττωμα.

   β) Να μην λειτουργεί μόνο ή να έχει άλλο ελάττωμα μόνο.

7. Αν Α , Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

   $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, $P(A)=P(B)$ και $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$, να βρείτε τις

   πιθανότητες: $P(A)$, $P(A\cap B)$ και $P(A\cap B')$

8. Έστω Α , Β ενδεχόμενα ενός πεπερασμένου δ.χ Ω και

   $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$, $P[(A\cap B')\cup(A'\cup B)]=\frac{1}{4}$. Να βρείτε:

   1. Το άθροισμα $P(A)+P(B)$
   2. Την πιθανότητα να μην πραγματοποιείται το Α και το Β συγχρόνως.

Ανισότητες και πιθανότητες

1. Αν P(A)=3/4 και P(B)=3/8 , δείξτε ότι:

   α) $P(A\cup B)\geq\frac{3}{4}$ και β) $\frac{1}{8}\leq P(A\cap B)\leq\frac{3}{8}$

2. Αν P(A)=3/8 και P(B)=1/2 να δείξετε ότι: $\frac{1}{2}\leq P(A\cup B)\leq\frac{7}{8}$

3. Αν Α , Β είναι ενδεχόμενα του δ.χ Ω με Ρ(Α)=2/3 και Ρ(Β)=1/2

   α) να εξετάσετε αν τα Α , Β είναι ασυμβίβαστα και

   β) να δείξετε ότι : $P(A' \cap B) \leq \frac{1}{3}$

4. Αν Α , Β είναι ενδεχόμενα του δ.χ Ω με Ρ(Α)=1/2 και $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ να δείξετε ότι: $1/4 \leq P(B) \leq 3/4$

5. Αν Ρ(Α) =0,2 και Ρ(Β)=0,3 ποια είναι η μέγιστη τιμή του $P(A \cap B)$;

6. Αν Ρ(Α) =0,6 και Ρ(Β)=0,7 ποια είναι η ελάχιστη τιμή του $P(A \cup B)$;

Πιθανότητες και άλλα κεφάλαια μαθηματικών

1. Αν Α είναι ένα ενδεχόμενο του δ.χ Ω να βρείτε πια είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του γινομένου $P(A) \cdot P(A')$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x^2-2x+a-2)e^x$ και $g(x)=(a^2-9)x-2004$ όπου η παράμετρος α επιλέγεται τυχαία από το σύνολο Ω={-10,-9,…,9,10}.

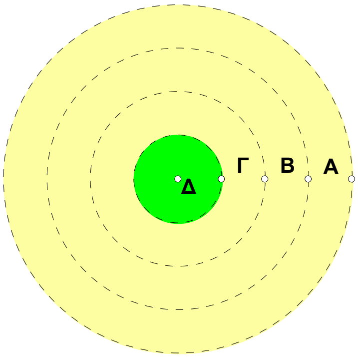
   Να βρείτε την πιθανότητα:

   - ✓ Η f να είναι γνησίως αύξουσα στο R.
   - ✓ Η g να είναι γνησίως αύξουσα στο R.
   - ✓ Οι f και g να είναι γνησίως αύξουσες στο R.
   - ✓ Μία τουλάχιστον από τις f , g να είναι γνησίως αύξουσα στο R.
   - ✓ Μία μόνο από τις f , g να είναι γνησίως αύξουσα στο R.
   - ✓ Ούτε η f, ούτε η g να είναι γνησίως αύξουσες στο R.

3. Δίνεται ευθ. τμήμα μήκους (ΑΒ)=10m. Με σημείο Γ, χωρίζουμε το ΑΒ σε δύο τμήματα ΑΓ και ΓΒ και με αυτά κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το μήκος του ΑΓ επιλέγεται τυχαία από την ρίψη ενός ζαριού, να βρείτε την

πιθανότητα το ορθογώνιο που θα σχηματισθεί να έχει το μεγαλύτερο δυνατόν εμβαδόν.

4.



Ένας στόχος για βέλη αποτελείται από τέσσερις ομόκεντρους κύκλους ακτίνων 10cm , 20cm , 30cm , 40cm αντίστοιχα. Οι πιθανότητες επιτυχίας καθενός από τους δακτυλίους Α, Β, Γ και του κύκλου Δ είναι ανάλογες των εμβαδών τους. Να βρείτε τις πιθανότητες αυτές με δεδομένο ότι η πιθανότητα επιτυχίας του στόχου είναι 80%

5. Έστω ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και Α , Β δύο ενδεχόμενα με πιθανότητες $P(A)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$, $P(A)=\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$ με χ $\geq$ 0. Αν το ενδεχόμενο «Α ή Β» είναι βέβαιο να βρείτε:

α) την μέγιστη τιμή της πιθανότητας του ενδεχομένου « Α και Β »

β) την ελάχιστη τιμή της πιθανότητας του ενδεχομένου « ή Α ή Β »

6. Αν α , β είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού που ρίχνεται δύο φορές να βρεθεί η πιθανότητα ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $αχ^2+4χ+β=0$ να είναι πραγματικές και άνισες.

7. Αν Α , Β είναι ενδεχόμενα του δ.χ Ω και P(A) , P(B) είναι ρίζες της εξίσωσης: $\begin{vmatrix} x & \frac{7}{6} \\ x & x \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$ με P(A) < P(B) τότε να δείξετε ότι

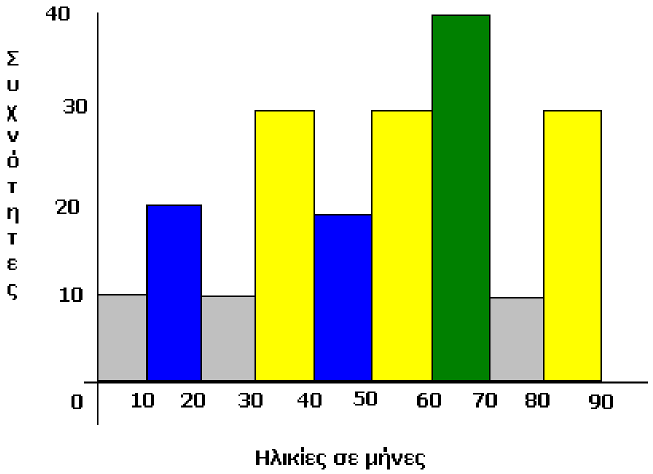
α) $\frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \leq \frac{2}{3}$ και β) $P(A \cup B) \geq \frac{1}{2}$

8. Έστω Ω={1,2,3,……,ν} ο δ.χ ενός πειράματος τύχης με

$$P(k)=\frac{\ln(2k+1)-\ln(2k-1)}{\ln 73} \quad \text{με } k\in\Omega.$$ Να βρεθεί ο ν.

9. Δίνεται το σύστημα { 5P(A)x + 2y =0 , 2x + 5P(A΄)y =0 }, όπου P (A), P (A΄) είναι οι πιθανότητες πραγματοποίησης των συμπληρωματικών ενδεχομένων Α, Α΄. Αν το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις τότε να βρεθεί η μέγιστη τιμή του γινομένου ye^x.

10.



Στο διπλανό ιστόγραμμα συχνοτήτων έχουμε τις ηλικίες των ζώων (σε μήνες) που φιλοξενούνται σε μια κτηνοτροφική μονάδα.

Επιλέγουμε ένα ζώο της μονάδας αυτής.

Βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων το ζώο να είναι:

Α: «Κάτω των 20 μηνών»

Β: «Από 5 ετών και πάνω»

Γ: Από 30 έως 50 μηνών»

Δ: Κάτω των 45 μηνών»

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τα δυνατά αποτελέσματα ω_1 , ω_2 , ω_3 ενός πειράματος τύχης πραγματοποιούνται με συχνότητες $2-\frac{\lambda}{2}$, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{2\cdot\lambda}$ αντίστοιχα. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι συχνότητες αυτές να αντιπροσωπεύουν τις πιθανότητες των ενδεχομένων ω_1 , ω_2 , ω_3 .

Υπόδειξη:

Αφού οι αριθμοί: $2-\frac{\lambda}{2}$, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{2\cdot\lambda}$ παριστάνουν συχνότητες πρέπει να είναι μη αρνητικοί …. Άρα $0<\lambda\leq 4$ Για να αντιπροσωπεύουν επιπλέον πιθανότητες πρέπει:

$$2-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2\cdot\lambda}=1\Leftrightarrow\ldots\lambda=-1\,(\alpha\pi o\rho)\ ,\ \lambda=3$$

2. Η πιθανότητα να λύσει ο μαθητής Α μια άσκηση μαθηματικών είναι 25% και η πιθανότητα να λύσει την ίδια άσκηση ο μαθητής Β είναι 80%. Να βρείτε την πιθανότητα:
   - ✓ Να λύσουν και οι δύο μαθητές την άσκηση
   - ✓ Να λύσει μόνο ο μαθητής Α την άσκηση
   - ✓ Να λύσει μόνο ένας μαθητής την άσκηση
   - ✓ Να λυθεί από ένα τουλάχιστον μαθητή η άσκηση
   - ✓ Να λυθεί το πολύ από ένα μαθητή η άσκηση

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{2}x^2+(\beta-8)\cdot x-2006$. Οι τιμές των α , β καθορίζονται από την ρίψη ενός ζαριού δύο φορές. Η πρώτη ένδειξη δίνει την τιμή του α και η δεύτερη την τιμή του β.
   - ✓ Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: « Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0=2 »
   - ✓ Στην συνέχεια να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

(απάντηση: 1/12)

4. Έστω Α , Β δύο ενδεχόμενα (μη κενά) με $A\subseteq B$, τέτοια ώστε:

$$[P(B)]^2-[P(A)+\frac{1}{2}]\cdot P(B)+\frac{P(A)}{2}\leq 0$$. Να αποδείξετε ότι: $P(B)\in(0,\frac{1}{2}]$

5. Για τα ενδεχόμενα Α , Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι οι αριθμοί $P(A)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0$$

   - ✓ Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β.
   - ✓ Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Β.

6. Εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα. Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και έστω Ω ο δειγματικός χώρος του πειράματος. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta \quad \text{και} \quad g(x) = 2k \cdot x^3 + \lambda \cdot x - 12x + 3$$

Όταν τα ζεύγη (α , β) , (k , λ)εκλέγονται τυχαία από το σύνολο Ω, να αποδειχθεί ότι είναι πιθανότερο α) η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο (1 , 10) παρά β) η g να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=1$