ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. **Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, ώστε:** $\vec{\Delta B} - \vec{\Gamma E} = \vec{\Delta\Gamma} - \vec{AE}$**. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β συμπίπτουν.**

2. **Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ. Δείξτε ότι:**

   α) Αν Μ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου το διάνυσμα

   $2 \cdot \vec{MA} + 3 \cdot \vec{MB} - 5 \cdot \vec{M\Gamma}$ **είναι ανεξάρτητο του Μ**

   β) Δεν υπάρχει σημείο Κ ώστε να ισχύει: $2 \cdot \vec{KA} + 3 \cdot \vec{KB} = 5 \cdot \vec{K\Gamma}$

3. **Δίνονται τα διανύσματα** $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ **, τα οποία ανά δύο είναι μη συγγραμμικά. Αν** $\vec{\alpha} // (\vec{\beta} + 2 \cdot \vec{\gamma})$ και $\vec{\beta} // (\vec{\gamma} + 2 \cdot \vec{\alpha})$ **, να δείξετε ότι:**

   $\vec{\beta} = -4 \cdot \vec{\alpha} - 2 \cdot \vec{\gamma}$

4. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε, τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν ισχύει** $\vec{AM} = \chi \cdot \vec{A\Delta} + y \cdot \vec{AE}$ **με χ+y=2, να δείξετε ότι:**

   α) $\vec{\Delta E} // \vec{B\Gamma}$

   β) τα Μ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

5. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν** $\vec{\Gamma M} = -\lambda \cdot \vec{AB} + (\lambda - 1) \cdot \vec{A\Gamma}$ **, με λ** $\in$ **R (μεταβλητός) , να αποδείξετε ότι το Μ ανήκει σε μια ευθεία για κάθε λ** $\in$ **R.**

6. **Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ. Να προσδιορίσετε σημείο Μ ώστε:** $\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+2\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{0}$

7. **Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και Μ σημείο ώστε** $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=x\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\,\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ **με χ+y =1. Να αποδείξετε ότι τα Μ, Β, Γ είναι συνευθειακά.**

8. **Έστω τα μη συγγραμμικά ανά δύο διανύσματα** $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ **με** $\vec{\alpha}//(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ και $\vec{\beta}//(\vec{\gamma}+\vec{\alpha})$**. Να αποδείξετε ότι:** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ **.**

9. **Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Αν** $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ **με λ∈R , να δείξετε ότι το Μ ανήκει σε μια ευθεία.**

10. **Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και κ, λ, μ ∈ R ώστε κ+λ+μ=0. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα** $\kappa\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\mu\cdot\mathrm{M\Gamma}$ **είναι σταθερό.**

11. **Δίνονται τα διανύσματα** $\vec{a}$ **=(1,2) και** $\vec{\beta}$ **=(2,3).**

    α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}=-10\vec{\alpha}+6\vec{\beta}$ **και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ**

    β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{V}$ **=(8,13) ως γραμμικό συνδυασμό των** $\vec{a}$ **και** $\vec{\beta}$**. Στη συνέχεια να αναλύσετε το** $\vec{V}$ **σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο** $\vec{a}$ **και η άλλη στο** $\vec{\beta}$**.**

12. **Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,5) , Β(-6,3) και Γ(2,1).**

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ

β) Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u}$ =(λ,λ) , λ∈R είναι παράλληλο με το $\vec{AM}$ για κάθε λ∈R.

γ) Να υπολογίσετε το λ, ώστε $\vec{AM} \uparrow\uparrow \vec{u}$.

13. **Δίνονται τα σημεία Α(1,-3/2) , Β(2,-1) και Μ(α, $\frac{\alpha-4}{2}$) όπου α∈R.**

α) Να αποδείξετε ότι τα Α , Β , Μ είναι συνευθειακά για κάθε α∈R.

β) Αν $\vec{BM} = \frac{1}{3}\cdot\vec{AB}$ να υπολογίσετε το α.

γ) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α έτσι ώστε: $\left|\vec{OM}\right| < \frac{4\sqrt{5}}{5}$

14. **Έστω τα σημεία Α(χ-y, y) , Β(2χ+y,2y) όπου χ , y∈R. Να βρείτε τα χ , Υ , έτσι ώστε το $\vec{AB}$ να σχηματίζει γωνία 45^0 με τον άξονα χ΄χ και** $\left|\vec{AB}\right| = 2$

15. **Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(α,α+2) , Β(β-2,β) , Γ(1,-1) και Δ(0,-2) με α , β∈R είναι συνευθειακά.**

16. **Έστω $\vec{a}$ =(1,-2) και $\vec{\beta}$ =(4,1).**

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = 2\cdot\vec{a}+\vec{\beta}$

β) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u}$ =(3,5) σε δύο συνιστώσες

παράλληλες προς τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.

17. Έστω τα σημεία Α(1,3) και Β(3,2).

α) Αν Μ(χ,y) και $\vec{AM} // \vec{AB}$ να αποδείξετε ότι χ+y=7

β) Αν $\vec{AN} = 2\cdot\vec{NB}$ να υπολογίσετε τις συν/νες του Ν.

18. Δίνονται τα σημεία Α(χ,y) και Β(-y,χ) με χ , y∈R. Να υπολογίσετε τα χ , y∈R έτσι ώστε $\left|\vec{AB}\right| = 8\cdot\sqrt{2}$ και το $\vec{OA}$ να σχηματίζει γωνία 60^0 με τον άξονα χ΄χ.

19. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}$ =(2,-3) και $\vec{\beta}$ =(1,4). Θεωρούμε τα σημεία Α , Β , Γ ώστε $\vec{AB} = 2\cdot\vec{a} + 3\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{A\Gamma} = 3\cdot\vec{\alpha} + 2\cdot\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{B\Gamma}$.

20. Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και το ύψος του ΑΔ. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

1) $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}$ 2) $\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma}$ 3) $\vec{A\Delta}\cdot\vec{BA}$

21. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ με $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{\beta}\right| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε

I) **το γινόμενο** $(\vec{a}+2\vec{\beta})(2\vec{a}+\vec{\beta})$.

II) **το μέτρο του διανύσματος** $3\vec{a}-2\vec{\beta}$.

III) **το συνημίτονο της γωνίας** $(3\vec{a}-2\vec{\beta}\ \widehat{,}\ 3\vec{a}+2\vec{\beta})$

22. **Έστω τα διανύσματα** $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ **και** $\vec{\gamma}$ **ώστε:**

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = 1\ ,\ \left|\vec{\gamma}\right| = \sqrt{2}\ \text{και}\ \vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{\gamma}.$$

I) Να δείξετε ότι: $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ **και**

II) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$.

23. **Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα** $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ **με** $4\left|\vec{a}\right| = 3\sqrt{3}\left|\vec{\beta}\right|$

και $\vec{\alpha} \perp (2\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$. **Να αποδείξετε ότι:** $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \dfrac{\pi}{6}$

24. **Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Δ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, που είναι τέτοια ώστε:** $\vec{\Delta M}\cdot\vec{B\Gamma}+2\cdot\vec{\Delta M}\cdot\vec{BA} = 0$**, ανήκουν σε μια ευθεία.**

25. **Έστω $\vec{a}$ =(-3,4) και $\vec{\beta}$ =(1,2). Να υπολογίσετε το διάνυσμα**

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$$

26. **Δίνεται το σταθερό σημείο Α. Αν τα σημεία Ο , Μ είναι τέτοια ώστε:**

$\vec{OM}^2+\vec{OA}^2=4+2\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OM}$ **, να αποδείξετε ότι το Μ ανήκει σε έναν κύκλο.**

27. **Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ =(3,4) και $\vec{v}$ =(-1,-2).**

Ι) Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$

ΙΙ) Να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη και η άλλη κάθετη στο $\vec{a}$

28. **Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα.**

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u}=\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\text{v}}=\kappa\cdot\vec{\alpha}-\lambda\cdot\vec{\beta}$

με κ, λ∈R. Να δείξετε ότι τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα.

29. **Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Δ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, που ικανοποιούν τη σχέση** $\vec{AM}\cdot\vec{AB}=\vec{AM}\cdot\vec{A\Gamma}$ **, ανήκουν σε μια ευθεία.**

30. **Έστω τα μοναδιαία διανύσματα** $\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\beta}$ **με** $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$**. Να υπολογίσετε το συν**$(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\,,\,\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

31. **Έστω τα διανύσματα** $\vec{\alpha}$ **,** $\vec{\beta}$**,** $\vec{\gamma}$ **με** $\vec{\alpha}+2\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ **και** $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=\frac{|\vec{\gamma}|}{2}$**. Να δείξετε ότι:** $\vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}+4\cdot\vec{\beta})$**.**

32. **Έστω το μη μηδενικό διάνυσμα** $\vec{\alpha}$ **και το διάνυσμα** $\vec{\beta}$ **με** $|\vec{\beta}|=1$ **και** $\left|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\right|=\frac{1}{2}$**. Να υπολογίσετε τη γωνία** $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$**.**