Μεταβλητή ευθεία από σταθερό σημείο

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια οικογένεια ευθειών (παραμετρική εξίσωση ευθείας) ΠΕΡΝΑ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΕΙΟ δηλ. αποτελεί ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ εργαζόμαστε με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1ος τρόπος : Δίνουμε δύο τιμές στην παράμετρο (συνήθως τέτοιες ώστε να μηδενίζεται κάποιος συντελεστής) και έτσι επιλέγουμε δύο από τις ευθείες της οικογένειας. Βρίσκουμε στη συνέχεια το σημείο τομής τους, και ελέγχουμε αν οι συν/νες του επαληθεύουν την εξίσωση της οικογένειας των ευθειών. Αν την επαληθεύουν, τότε έχουμε δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο τομής που προσδιορίσαμε πιο πάνω. Αν δεν την επαληθεύουν δεν έχουμε δέσμη ευθειών.

2ος τρόπος : Διαμορφώνουμε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας έτσι ώστε στο πρώτο μέλος να έχουμε πολυώνυμο ως προς λ και στο δεύτερο μέλος 0. Επειδή τώρα αυτή η σχέση πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή της παραμέτρου, ΠΡΕΠΕΙ όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου αυτού να είναι μηδέν. Η λύση του συστήματος που προκύπτει (αν έχει λύση) είναι το κέντρο της δέσμης των ευθειών. Αν το σύστημα είναι αδύνατο, τότε δεν έχουμε δέσμη ευθειών.

Σημείωση : Όμοια εργαζόμαστε και όταν αντί για οικογένεια ευθειών, έχουμε οικογένεια κύκλων ή άλλων καμπυλών.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2\lambda-1)x+3\lambda y-(\lambda+2)=0$ παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda\in R$, που περνά από σταθερό σημείο, το οποίο και να προσδιορισθεί.

2. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $(2k^2-1)x+3ky-(k+2)=0$ παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $k\in R$. Περνά από σταθερό σημείο;

3. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in R$, η εξίσωση: $(\lambda+1)^2 \chi+(3\lambda+1)y+(5\lambda^2-2\lambda+1)=0$ παριστάνει ευθεία που περνά από σταθερό σημείο το οποίο και να προσδιορίσετε.

4. Στις πλευρές Οχ , Οy γωνίας χΟy κινούνται τα σημεία Α , Β αντίστοιχα ώστε (ΟΑ)+(ΟΒ)=c [c=σταθερό]. Να δείξετε ότι η μεσοκάθετη του ευθ. τμήματος ΑΒ περνά από σταθερό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.

5. Μεταβλητό ορθογώνιο ΟΑΒΓΔ, έχει την κορυφή του Ο σταθερή, οι κορυφές του Α , Γ βρίσκονται πάνω στις σταθερές ημιευθείες ΟΧ , Οy αντίστοιχα και η περίμετρός του παραμένει σταθερή και ίση με 2c. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που περνά από το Β και είναι κάθετη στην ΑΓ, περνά από σταθερό σημείο.

6. Να βρείτε όλες τις ευθείες (οικογένεια ευθειών) που τέμνουν τους άξονες στα σημεία (α,0) και (0,β) με α+β=2c (c=σταθερό) και $\alpha\beta \neq 0$.
Να εξετάσετε αν όλες αυτές οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο.

7. Δίνεται ορθή γωνία χΑy και στις πλευρές της Χ , Αy αντίστοιχα τα σημεία Β , Γ ώστε να ισχύει: $\frac{1}{(AB)}+\frac{1}{(A\Gamma)}=\frac{1}{c}$, όπου c=σταθερό. Να δείξετε ότι η ευθεία ΒΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.

8. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in R$, η εξίσωση: $\chi^2+y^2+2\chi+3y-7+\lambda(\chi-5y+6)=0$ παριστάνει κύκλο, ο οποίος περνά από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να προσδιορισθούν.

9. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\mu \in R\{-1\}$, η εξίσωση: $\chi^2+y^2+2\chi+3y-7+\mu(\chi^2+y^2+3x-2y-1)=0$ παριστάνει κύκλο, ο οποίος περνά από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να προσδιορισθούν.