ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για την συνάρτηση f ισχύει το θεώρημα Rolle στο διάστημα [0,1] και μάλιστα αρκεί να αποδείξουμε ότι f(0) = f(1) (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R)

Έχουμε : $\int_x^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \ge 0 \Leftrightarrow \int_x^{0} f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \ge 0 \Leftrightarrow$

$-\int_0^{x} f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \ge 0, x \in R$

Θέτουμε : $g(x) = -\int_0^{x} f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \ge 0$, $x \in R$. Η συνάρτηση g(x) είναι παραγωγίσιμη (διότι …).

Παρατηρούμε ότι g(0) = 0 και g(1) = 0. Τότε η σχέση (1) γράφεται : $g(x) \ge g(0)$ και $g(x) \ge g(1)$, για κάθε $x \in R$. Άρα η g παρουσιάζει στις θέσεις x_1= 0 και x_2= 0 τοπικά ελάχιστα και σύμφωνα με το θεωρ. Fermat είναι g΄(0) = 0 και g΄(1) = 0.

Όμως g΄(x) =-f(x)+2xf(x^2) – 2x + 1, για $x \in R$. Οπότε έχουμε :

g΄(0) = 0   -f(0) + 1 = 0 ⇔ f(0) = 1

και   ⇔   και

g΄(1) = 0   -f(1) + 2f(1) – 1 = 0 ⇔ f(1)=1

Δηλαδή f(0) = f(1), οπότε ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο [0,1] και συνεπώς υπάρχει

$\xi \in (0,1) : f'(\xi) = 0$

ΘΕΜΑ 2^{o}

i) Παρατηρούμε ότι η $f(x) = 1 - \int_0^x tf(t)dt$ είναι διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα παραγωγίζεται

ii)Έχουμε $f'(x) = -xf(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -x \Rightarrow [\ln f(x)]' = -x \Rightarrow \ln f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + c \Rightarrow$

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}+c} \Rightarrow f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{c}$ με $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow e^{c} = 1 \Rightarrow f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

iii) Από υπόθεση έχουμε

$$\int_0^x tf(t)dt = 1 - f(x) \Rightarrow \int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1 - f(x) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1 - \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

ΘΕΜΑ 3^{o}

Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f (που είναι συνεχής) προκύπτει ότι :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 \ , & x \in [-1,0) \\ \frac{1}{2}x + 2 \ , & x \in [0,2) \\ -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2} \ , & x \in [2,6] \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + c_1 \ , & x \in [-1,0) \\ \frac{x^2}{4} + 2x + c_2 \ , & x \in [0,2) \\ -\frac{x^2}{8} + \frac{9}{2}x + c_3 \ , & x \in [2,6] \end{cases}$$

Όμως η F(x) είναι συνεχής ως παράγουσα συνεχούς συνάρτησης άρα :

$$\lim_{x \to 0^-}(x^2+2x+c_1)=\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{x^2}{4}+2x+c_2\right)=F(0)\Rightarrow c_1=c_2=\int_{-1}^{0}(2x+2)dx=[x^2+2x]_{-1}^{0}=-[(-1)^2+2(-1)]=1$$

και

$$\lim_{x \to 2^-}\left(\frac{x^2}{4}+2x+c_2\right)=\lim_{x \to 2^+}\left(-\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{2}x+c_3\right)\Rightarrow 1+4+1=-\frac{12}{8}+9+c_3\Rightarrow c_3=-3+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$$

Και άρα:
$$F(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 \ , \ x\in[-1,0) \\ \dfrac{x^2}{4}+2x+1 \ , \ x\in[0,2) \\ -\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{9}{2}x \ , \ x\in[2,6] \end{cases}$$

Από το σχήμα έχουμε ότι F΄(x) = f(x) > 0 για κάθε x∈ (-1,6) = η F είναι γνήσια αύξουσα στο κλειστό διάστημα [-1,6] = ακρότατα έχει μόνο στα άκρα του διαστήματος

= $F_{\varepsilon\lambda}$ = F(-1) = 0

$F_{\mu\varepsilon\gamma}$ = F(6) = $-\frac{3}{8}6^2+\frac{9}{2}6-\frac{3}{2}=......=12$

ή $F_{\mu\varepsilon\gamma}=\int_{-1}^{6}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(2x+2)dx+\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx+\int_{2}^{6}\left(-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}\right)dx=..........=12$

<u>ΘΕΜΑ 4</u>

α) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+1\geq 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, επομένως και «1-1». Άρα αντιστρέφεται.

β) Ξέρουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x (διχοτόμο 1ου και 3ου τεταρτημόριου). Άρα τα κοινά τους σημεία (αν υπάρχουν) θα είναι τα κοινά σημεία της f και της y=x. Αρκεί λοιπόν να λύσουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} y=\eta\mu x+x \\ y=x \\ 0\leq x\leq\pi \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} \eta\mu x=0 \\ y=x \\ 0\leq x\leq\pi \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow(x=0,y=0)\ \text{και}\ (x=\pi,y=\pi)$$

γ) Λόγω της προαναφερθείσας συμμετρίας αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της f και της y=x και να το διπλασιάσουμε.

Προφανώς οι f και y=x είναι συνεχείς και άρα ολοκληρώσιμες.

Επίσης $\eta\mu x+x-x\geq 0$ και άρα:

$$E=2\cdot\int_0^{\pi}(\eta\mu x+x-x)dx=2\cdot\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=2\cdot[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=2\cdot(1+1)=4$$

www.alis-nikolaidis.tk