<u>ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1^0</u>

A) Το σημείο Μ(z), εικόνα του $z=x+yi\ ,\ x,y\in R$, είναι σημείο του ζητούμενου γ.τ <u>αν και μόνο αν</u> ισχύει: $|2z-5|=|4-z|\Leftrightarrow|(2x-5)+2yi|=|(4-x)-yi|\Leftrightarrow(2x-5)^2+4y^2=(4-x)^2+y^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2-20x+25+4y^2=16-8x+x^2+y^2\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+3=0$$

Άρα ο ζητούμενος γ . τα είναι ο κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και $\rho=\dfrac{\sqrt{16+0-12}}{2}=1$

Β) Η παράσταση $|z_1-z_2|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων M_1 , M_2 , των δύο μιγαδικών αριθμών δηλ. $|z_1-z_2|=(M_1M_2)$. Όμως η χορδή M_1M_2 είναι πάντα μικρότερη ή ίση της διαμέτρου και άρα: $|z_1-z_2|=(M_1M_2)\le 2\rho=2$

<u>ΘΕΜΑ 2^0</u>

$|(3-2i)z^3-iz|<15\Leftrightarrow|z|\cdot|(3-2i)z^2-i|<15$ και άρα αρκεί να δείξουμε ότι:

$\dfrac{3}{2}\cdot|(3-2i)z^2-i|<15\Leftrightarrow|(3-2i)z^2-i|<10$. Όμως $|(3-2i)z^2-i|<|(3-2i)z^2|+|i|$

και άρα αρκεί να αποδείξουμε: $|(3-2i)z^2|+|i|<10\Leftrightarrow|(3-2i)z^2|<9\Leftrightarrow(3-2i)z^2\,\overline{(3-2i)z^2}<81\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(3-2i)z^2(3+2i)\bar{z}^2<81\Leftrightarrow 13|z|^4<81\Leftrightarrow 13\frac{81}{16}<81$$

<u>ΘΕΜΑ 3^0</u>

A) Έχουμε: $z_1\cdot z_2=w^2\Leftrightarrow z_2=\dfrac{w^2}{z_1}$ και έτσι

$$\left|\frac{z_1+z_2}{2}+w\right|+\left|\frac{z_1+z_2}{2}-w\right|=\left|\frac{z_1+\frac{w^2}{z_1}}{2}+w\right|+\left|\frac{z_1+\frac{w^2}{z_1}}{2}-w\right|=\left|\frac{z_1^2+w^2}{2z_1}+w\right|+\left|\frac{z_1^2+w^2}{2z_1}-w\right|=$$

$$=\left|\frac{z_1^2+w^2+2z_1w}{2z_1}\right|+\left|\frac{z_1^2+w^2-2z_1w}{2z_1}\right|=\frac{|z_1+w|^2+|z_1-w|^2}{2|z_1|}=\frac{(z_1+w)\left(\bar{z}_1+\bar{w}\right)+(z_1+w)\left(\bar{z}_1+\bar{w}\right)}{2|z_1|}=$$

$$=\frac{2|z_1|^2+2|w|^2}{2|z_1|}=|z_1|+|z_2|$$

Β) Από τους τύπους Vieta έχουμε: $z_1+z_2=1+i$ και $z_1\cdot z_2=-1\Rightarrow w^2=1$ και άρα:

$$|z_1|+|z_2|=\left|\frac{z_1+z_2}{2}+w\right|+\left|\frac{z_1+z_2}{2}-w\right|=\ldots\ldots$$

<u>ΘΕΜΑ 4^0</u>

$|z_3-z_1|=\ldots=\dfrac{\sqrt{5}}{2}|z_2-z_1|$, $|z_3-z_2|=\ldots=\dfrac{1}{2}|z_2-z_1|$.Επαληθεύστε τώρα το Πυθαγόρειο θεώρημα.

aris nikolaidis