ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 1^0

Α) Το σημείο M(z), εικόνα του $z = x + yi$, $x, y \in R$, είναι σημείο του ζητούμενου γ.τ αν και μόνο αν ισχύει:

$$|2z-5| = |4-z| \Leftrightarrow |(2x-5)+2yi| = |(4-x)-yi| \Leftrightarrow (2x-5)^2 + 4y^2 = (4-x)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 + 4y^2 = 16 - 8x + x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

Άρα ο ζητούμενος γ . τα είναι ο κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και $\rho = \dfrac{\sqrt{16+0-12}}{2} = 1$

Β) Η παράσταση $|z_1 - z_2|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων M_1 , M_2 , των δύο μιγαδικών αριθμών δηλ. $|z_1 - z_2| = (M_1M_2)$. Όμως η χορδή M_1M_2 είναι πάντα μικρότερη ή ίση της διαμέτρου και άρα: $|z_1 - z_2| = (M_1M_2) \leq 2\rho = 2$

Γ) $|(3-2i)z^3 - iz| < 15 \Leftrightarrow |z| \cdot |(3-2i)z^2 - i| < 15$ και άρα αρκεί να δείξουμε ότι:

$\dfrac{3}{2} \cdot |(3-2i)z^2 - i| < 15 \Leftrightarrow |(3-2i)z^2 - i| < 10$. Όμως $|(3-2i)z^2 - i| < |(3-2i)z^2| + |i|$

και άρα αρκεί να αποδείξουμε:

$$|(3-2i)z^2| + |i| < 10 \Leftrightarrow |(3-2i)z^2| < 9 \Leftrightarrow (3-2i)z^2\,\overline{(3-2i)z^2} < 81 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3-2i)z^2(3+2i)\bar{z}^2 < 81 \Leftrightarrow 13|z|^4 < 81 \Leftrightarrow 13\frac{81}{16} < 81$$

ΘΕΜΑ 2^0

Α) Για κάθε $\lambda \in R = e^{\lambda} > 0$ και η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει ρίζες: $x(\lambda) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+e^{2\lambda}}}{e^{\lambda}}$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} x(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \frac{1+\sqrt{1+e^{2\lambda}}}{e^{\lambda}} = +\infty$$ διότι: $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} x(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \frac{1-\sqrt{1+e^{2\lambda}}}{e^{\lambda}} \overset{\text{συζυγή}}{===} \ldots = \frac{1}{2}$$

Β) Αφού η f είναι συνεχής στο [0 , 4] θα παρουσιάζει μια μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m. Επειδή δε είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε M > m. Έτσι:

$$\left.\begin{matrix} m \leq f(1) \leq M \\ m \leq f(2) \leq M \\ m \leq f(3) \leq M \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} 3m \leq f(1)+f(2)+f(3) \leq 3M$$

Από το θεώρημα τώρα των ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (0,4) : f(x_0) = \frac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}$

Γ) Για x=y=0 προκύπτει f(0)=0

$f(x) = f[(x - x_0) + x_0] = f(x - x_0) + f(x_0)$

Αφού η f είναι συνεχής στο σημείο 0, θα έχουμε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$. Έτσι στο τυχαίο σημείο $x_0 \in R$ θα έχουμε: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x - x_0) + f(x_0)] = f(x_0) + \lim\limits_{x \to x_0} f(x - x_0)$

Υπολογισμός του ορίου $\lim\limits_{x \to x_0} f(x - x_0) \overset{x-x_0=t}{=} \lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0$. Επομένως $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

δηλ. η f συνεχής στο x_0 .

<u>ΘΕΜΑ 3⁰</u>

Α) Η προβολή Α(x , 0) κινείται με ταχύτητα $1\frac{cm}{sec}$ και άρα $x'(t) = 1\frac{cm}{sec}$. Εξάλλου

$E(t) = \frac{1}{2} x(t) \cdot \ln x(t)$. Τη χρονική στιγμή t_0 που η ΟΜ εφάπτεται στην C_f , έχουμε:

$\lambda_{OM} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = e$. Άρα

$E'(t) = \left(\frac{1}{2} x(t) \cdot \ln x(t)\right)' = \frac{1}{2}\left(x'(t) \cdot \ln x(t) + x(t) \cdot \frac{x'(t)}{x(t)}\right) = \frac{1}{2} x'(t)(\ln x(t) + 1)$ και την χρονική στιγμή t_0 , είναι:

$$E'(t) = \left(\frac{1}{2} x(t) \cdot \ln x(t)\right)' = \frac{1}{2} x'(t_0)(\ln x(t_0) + 1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\ln e + 1)\frac{cm^2}{sec} = 1\frac{cm^2}{sec}$$

Β) Αν θ είναι η γωνία τότε: $\varepsilon\varphi\theta = \lambda_{OM} = \frac{\ln x}{x}$

$$(\varepsilon\varphi\theta(t))' = \left(\frac{\ln x(t)}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = x'(t) \cdot \frac{1 - \ln x(t)}{x^2(t)}$$ ....

<u>ΘΕΜΑ 4⁰</u>

$f'(x) = \frac{2\pi x^2 \sigma\upsilon\nu(\pi x^2) - \eta\mu(\pi x^2)}{x^2}$, για κάθε $x \neq 0$, $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^2} = \pi$. Άρα :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2\pi x^2 \sigma\upsilon\nu(\pi x^2) - \eta\mu(\pi x^2)}{x^2} & , \ x \neq 0 \\ \pi & , \ x = 0 \end{cases}$$

Η f' είναι συνεχής σαν πηλίκο συνεχών για κάθε $x \neq 0$, ενώ

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2\pi x^2 \sigma\upsilon\nu(\pi x^2) - \eta\mu(\pi x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2) - \frac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^2}\right) = \pi = f'(0)$$

Εφαρμόστε το θεώρημα Bolzano για την f' στο διάστημα [0 , 1]

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{x} = 2\pi \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x^3} - \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^2}\right] = 2\cdot\pi\cdot 0 - 0\cdot\pi = 0$$

διότι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x} \leq \frac{1}{x}$ και $\lim_{x\to +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x} = 0$$

aris nikolaidis