Υπόδειξη λύσεων

ΘΕΜΑ 1^0

$$|z_1+z_2|>|1+z_1\cdot\overline{z_2}| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2>|1+z_1\cdot\overline{z_2}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1}+\overline{z_2})>(1+z_1\cdot\overline{z_2})\cdot(1+\overline{z_1}\cdot z_2)\Leftrightarrow$$

$$z_1\cdot\overline{z_1}+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}>1+z_2\cdot\overline{z_1}+z_1\cdot\overline{z_2}+z_1\cdot\overline{z_1}\cdot z_2\cdot\overline{z_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-1-|z_1|^2\cdot|z_2|^2>0\Leftrightarrow |z_1|^2\cdot\left(1-|z_2|^2\right)-\left(1-|z_2|^2\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1-|z_2|^2\right)\cdot\left(|z_1|^2-1\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}1-|z_2|^2>0 \quad \text{και} \quad |z_1|^2-1>0\\ \text{ή}\\ 1-|z_2|^2<0 \quad \text{και} \quad |z_1|^2-1<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}|z_2|<1 \quad \text{και} \quad |z_1|>1\\ \text{ή}\\ |z_2|>1 \quad \text{και} \quad |z_1|<1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Η εικόνα του } z_2 \text{ είναι στο εσωτερικό του κύκλου } C\\ \text{και η εικόνα του } z_1 \text{ στο εξωτερικό του}\\ \text{ή}\\ \text{Η εικόνα του } z_2 \text{ είναι στο εξωτερικό του κύκλου } C\\ \text{και η εικόνα του } z_1 \text{ στο εσωτερικό του}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ένα μόνο από τα σημεία } A\,,B \text{ είναι εσωτερικό του κύκλου } C$$

ΘΕΜΑ 2^0

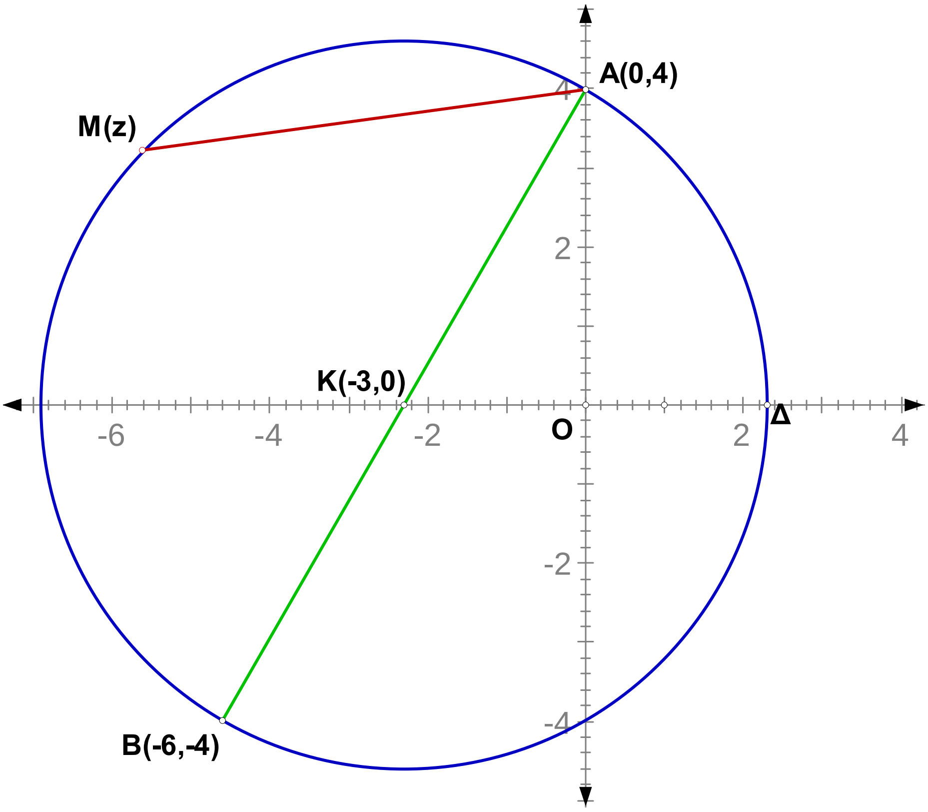
Α. Αν $z=x+y\cdot i$, $x,y\in IR$ τότε:

$$|2z+1|=|z-7| \Leftrightarrow |(2x+1)+2yi|=|(x-7)+yi|\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)^2+4y^2=(x-7)^2+y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-16=0\Leftrightarrow (x+3)^2+y^2=25\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |(x+3)+yi|=5\Leftrightarrow |z+3|=5$$

. Άρα ο ζητούμενος γ . τ είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(-3 , 0) και ακτίνα ρ=5

Β. $|z-4i| = |(z+3)-(3+4i)| \le |z+3| + |3+4i| = 5 + \sqrt{3^2+4^2} = 10$

Γ. Η παράσταση $|z-4i|$ εκφράζει την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού z την εικόνα του 4i, δηλαδή το (ΜΑ) . Για να γίνεται αυτή μέγιστη πρέπει το Μ να ταυτιστεί με το Β (αντιδιαμετρικό του Α)



<u>Εύρεση του Β</u> :

$$\begin{Bmatrix} x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -3 = \dfrac{0 + x_B}{2} \\ 0 = \dfrac{4 + y_B}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_B = -6 \\ y_B = -4 \end{Bmatrix}$$ Άρα ο ζητούμενος μιγαδικός αριθμός είναι ο $z = -6 - 4 \cdot i$